1 Kinematika hmotného bodu

Usain Bolt je pokladaný za najrýchlejšieho muža sveta, ktorý za 9,58 s zabehne 100 m. Ak by však súťažil zo zvieratami – cicavcami, bol by úspešný? Predbehol by napríklad mačku alebo hrocha?

Základné pojmy:

dráha, trajektória, rýchlosť, priemerná rýchlosť, zrýchlenie, rovnomerný priamočiary pohyb, rovnomerne zrýchlený (spomalený) priamočiary pohyb, voľný pád, zvislý vrh nahor (nadol), šikmý vrh

Kinematika sa zaoberá opisom pohybu telesa. Snaží sa odpovedať na otázku aká je dráha, rýchlosť a zrýchlenie telesa. Kvôli lepšiemu popisu pohybu telesa sa zavádza model tzv. hmotného bodu. Je to teleso, ktoré má pôvodnú hmotnosť telesa, ale jeho rozmery sa zanedbávajú.

V tejto časti rozdelíme pohyby z hľadiska trajektórie a z hľadiska zmeny rýchlosti v čase. Uvedieme konkrétne typy pohybov a popíšeme ich dráhu, rýchlosť a zrýchlenie. Ukážeme ako riešiť príklady z tejto oblasti.

Poloha hmotného bodu sa vždy určuje vzhľadom na iné telesá, resp. na súradnicovú sústavu, ktorá je spojená s daným telesom. Na popis polohy hmotného bodu v karteziánskej súradnicovej sústave používame súradnice x, y, z (napr. bod A má súradnice x = 2 cm, y = 0 cm, z = - 4 cm).

Ak sa teleso pohybuje, menia sa jeho súradnice, sú funkciou času $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Počas pohybu sa teleso pohybuje po geometrickej čiare **trajektórii**. Dĺžka trajektórie alebo jej časť sa nazýva **dráha**.

Pohyby delíme:

1. podľa trajektórie – na **priamočiare a krivočiare**,

2. podľa závislosti veľkosti rýchlosti od času – na **rovnomerné a nerovnomerné**.

Rovnomerný pohyb je pohyb, pri ktorom hmotný bod prejde v ľubovoľných, ale rovnakých časových intervaloch rovnaké dráhy.

Rýchlosť rovnomerného pohybu udáva číselne prejdenú dráhu za časovú jednotku

$$v = \frac{s}{t}. \tag{1.1}$$

Jednotkou rýchlosti je meter za sekundu, (v) = m/s.

Nerovnomerný pohyb je pohyb, pri ktorom sa rýchlosť hmotného bodu v rovnakých časových úsekoch mení, nie je konštantná.

Priemerná rýchlosť nerovnomerného pohybu

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{s}{t}, \tag{1.2}$$

kde s je dráha prejdená pri nerovnomernom pohybe za dobu t.

Zrýchlenie je veličina, ktorá charakterizuje zmenu rýchlosti za časový interval. V prípade rovnomerného pohybu je nulové, v prípade nerovnomerného pohybu je nenulové.

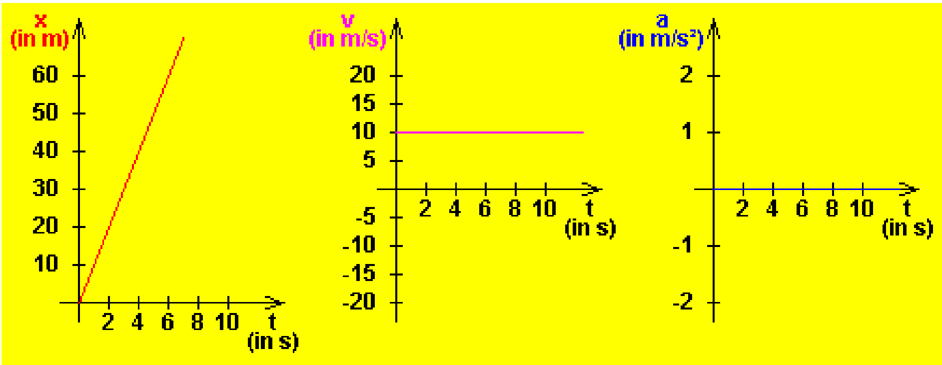
Jednotkou zrýchlenia je meter za sekundu na druhú, $(a) = m/s^2$.

Pri priamočiarom pohybe sa všetky body telesa pohybujú po priamke, pri krivočiarom pohybe po krivke (napr. kružnici).

Rovnomerný priamočiary pohyb je pohyb s konštantnou rýchlosťou (v = konš.) a nulovým zrýchlením ($a = 0$) po priamke, ktorého dráha

$$s = vt + s_0, \tag{1.3}$$

kde s_0 je počiatočná dráha v čase $t = 0$ s. Jednotkou dráhy je meter, (s) = m. Grafom závislosti rýchlosti od času pri tomto pohybe je časť priamky rovnobežná s časovou osou (obr. 1.1, 2. graf). Grafom závislosti dráhy od času je polpriamka, ktorá v prípade, že $s_0 = 0$ prechádza počiatkom súradnicovej sústavy (obr. 1.1, 1. graf). Ak s_0 nie je nulové, potom polpriamka vychádza z niektorej hodnoty na osi x.



Obr. 1.1

Rovnomerne zrýchlený (spomalený) priamočiary pohyb je pohyb po priamke s konštantným zrýchlením ($a \neq 0$, a = konš.), pre dráhu a rýchlosť ktorého platí

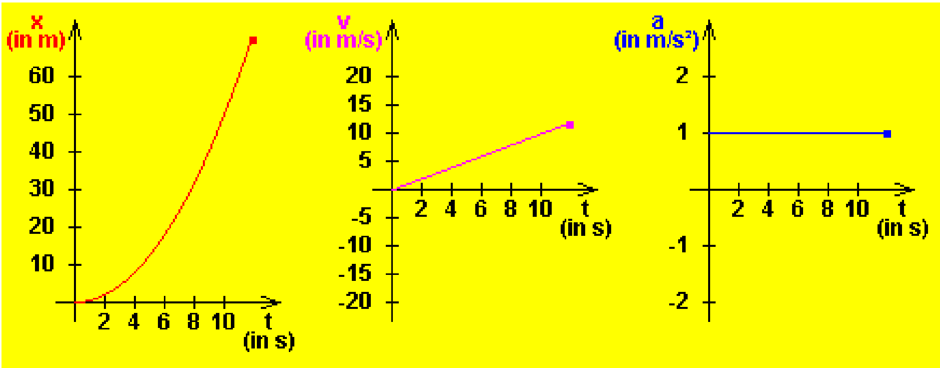
$$v = v_0 \pm at \tag{1.4}$$

$$s = v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2 \tag{1.5}$$

kde s_0 je počiatočná dráha a v_0 je počiatočná rýchlosť v čase $t = 0$ s.

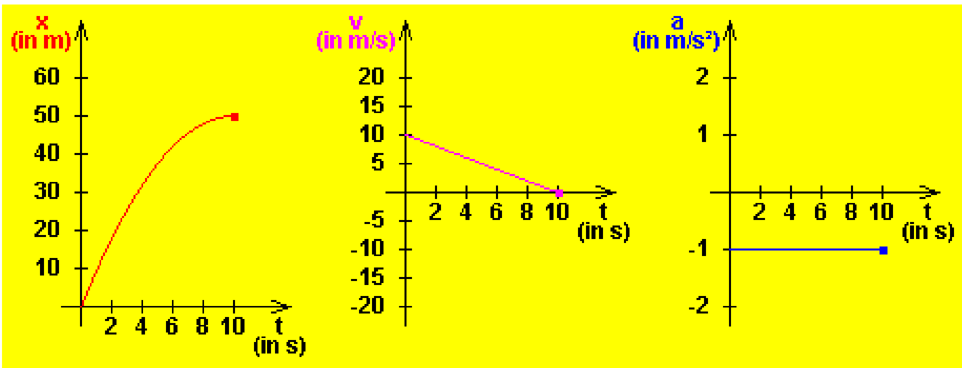
Vo vzťahoch (1.4) a (1.5) znamienko + platí pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb a znamienko – pre rovnomerne spomalený pohyb.

Grafom závislosti rýchlosti od času pri rovnomerne zrýchlenom pohybe je časť priamky, ktorá prechádza počiatkom súradnicového systému v prípade $v_0 = 0$ (obr. 1.2, 2. graf). Grafom závislosti dráhy od času je časť paraboly (obr. 1.2, 1. graf).



Obr. 1.2

Grafom závislosti rýchlosti od času pri rovnomerne spomalenom pohybe je časť priamky (obr. 1.3, 2. graf). Grafom závislosti dráhy od času je časť paraboly (obr. 1.3, 1. graf). Grafom zrýchlenia je časť priamky rovnobežná s časovou osou (obr. 1.3, 3.graf).



Obr. 1.3

V prípade, že sa teleso pohybuje v poli zemskej tiaže ($a = g$) pre jeho pohyb platia podobne rovnice ako pri rovnomerne zrýchlenom (spomalenom) pohybe, ak je vrhnuté nadol (nahor) alebo padá voľne dole.

Na tvorbu grafov pre tieto typy pohybov pozri aplet:

http://www.walter-fendt.de/ph14sk/acceleration_sk.htm

Voľný pád je pohyb rovnomerne zrýchlený ($s_0 = 0$, $v_0 = 0$, $a = g$). Pre rýchlosť a dráhu tohto pohybu platí

$$v = gt \tag{1.6}$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.7}$$

Zvislý vrh nahor (nadol) je pohyb zložený z rovnomerného pohybu priamočiareho so začiatočnou rýchlosťou v_0 v smere zvislom nahor (nadol) a z voľného pádu. Dráha a rýchlosť tohto pohybu sú dané

$$v = v_0 \mp gt \tag{1.8}$$

$$s = v_0 t \mp \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.9}$$

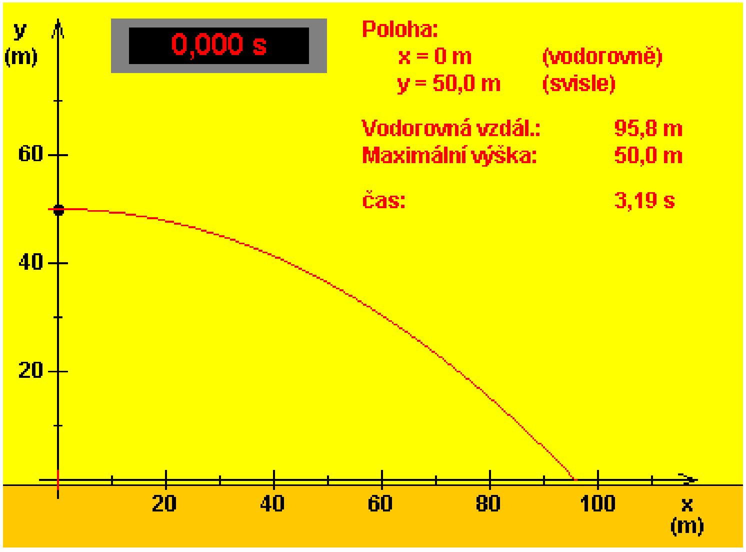
Vo vzťahoch (1.8) a (1.9) znamienko – platí pre zvislý vrh nahor a znamienko + platí pre zvislý vrh nadol.

Vodorovný vrh je zložený z dvoch pohybov. Vo vodorovnom smere je to pohyb priamočiary rovnomerný s počiatočnou rýchlosťou v_0, v zvislom smere je to voľný pád. Trajektória vodorovného vrhu je parabola s vrcholom v mieste začiatku vrhu (obr. 1.4, výška h = 50 m predstavuje miesto začiatku vrhu).

Súradnice ľubovoľného bodu dráhy v čase t sú

$$x = v_0 t \tag{1.10}$$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.11}$$



Obr. 1.4

a súradnice rýchlosti

$$v_x = v_0 \tag{1.12}$$

$$v_y = -gt \tag{1.13}$$

Znamienko - vo vyjadrení rýchlosti v_y *znamená, že smer vektora rýchlosti je opačný ako smer osi y.*

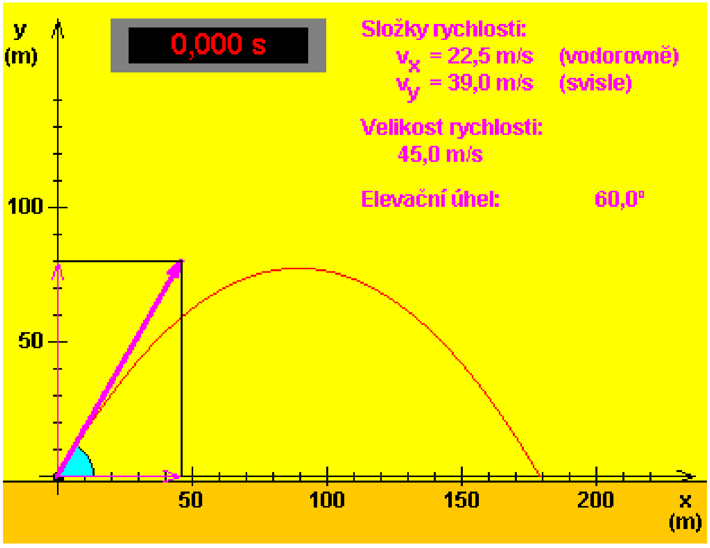
Šikmý vrh je pohyb, ktorý vykoná hmotný bod alebo teleso, ak je vrhnuté so začiatočnou rýchlosťou v_0 pod určitým uhlom $\alpha \in \left(0^0, 90^0\right)$ k vodorovnej rovine. Vo vodorovnom smere je to pohyb priamočiary rovnomerný s rýchlosťou $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$. V zvislom smere je to zvislý vrh nahor so začiatočnou rýchlosťou $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Trajektória je parabola s vrcholom v najvyššom bode trajektórie (obr. 1.5).

Súradnice ľubovoľného bodu dráhy v čase *t* sú

$$x = v_0 t \cos\alpha + x_0, \tag{1.14}$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + y_0 \, , \tag{1.15}$$

kde x_0, y_0 sú súradnice bodu, z ktorého je teleso vrhané.



Obr. 1.5

Súradnice rýchlosti

$$v_x = v_0 \cos\alpha \tag{1.16}$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \tag{1.17}$$

Na tvorbu grafov pre tieto typy pohybov pozri aplet:

http://www.walter-fendt.de/ph14cz/projectile_cz.htm

Najjednoduchší krivočiary pohyb je rovnomerný pohyb po kružnici. Pre veľkosť jeho **(obvodovej) rýchlosti** platí

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \, . \tag{1.18}$$

Je to rýchlosť, ktorou obieha bod po odvode kružnice.

Rovnomerný pohyb po kružnici je pohyb, pri ktorom hmotný bod za rovnaké ľubovoľne zvolené časové úseky opíše rovnako dlhé oblúky kružnice Δs, ktorým prislúchajú rovnako veľké uhly $\Delta\varphi$.

Veľkosť vektora rýchlosti pri rovnomernom pohybe po kružnici je konštantná, ale jeho smer sa mení. Vektor rýchlosti má smer dotyčnice ku kružnici, je teda kolmý na polomer kružnice.

Uhlová rýchlosť je určená podielom uhla $\Delta\varphi$ a príslušného časového intervalu Δt, za ktorý hmotný bod tento uhol opísal

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,. \tag{1.19}$$

Jednotkou uhlovej rýchlosti je radián za sekundu (rad/s), pri výpočtoch sa dosadzuje len jej rozmer s^{-1}. Medzi uhlovou a obvodovou rýchlosťou platí vzťah

$$v = r\omega\,, \tag{1.20}$$

kde r je polomer kružnice.

Čas, za ktorý pri rovnomernom pohybe po kružnici hmotný bod opíše jednu kružnicu sa nazýva **perióda (obežná doba) *T***. Jej prevrátená hodnota určuje počet obehov za časovú jednotku – **frekvencia**

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.21}$$

Jednotkou frekvencie je Hertz, $(f) = \mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$ a jednotkou periódy je sekunda, $(T) = \mathrm{s}$.

Pre veľkosť obvodovej rýchlosti a uhlovej rýchlosti vyjadrenej pomocou periódy platí

$$v = \frac{2\pi r}{T}\,, \tag{1.22}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\,. \tag{1.23}$$

Rovnomerný pohyb po kružnici je pohyb so zrýchlením, pretože sa mení smer rýchlosti. Vektor zrýchlenia, ktorý pri svojom pohybe hmotný bod má, je kolmý na smer vektora rýchlosti. Toto zrýchlenie sa nazýva **dostredivé zrýchlenie**

$$a_{\mathrm{d}} = \frac{v^2}{r} \tag{1.24}$$

Pomenovanie pre dostredivé zrýchlenie vyplýva aj so smeru zrýchlenia, ktoré má smer polomeru kružnice, teda smeruje do stredu kružnice.

○ Riešené príklady

Príklad 1.1 Vypočítajte rýchlosť, ktorou Usain Bolt zabehne dráhu 100 m za 9,58 s. Ak by súťažil zo zvieratami – mačkou a hrochom na tej istej dráhe predbehol by ich? Rýchlosť mačky je 45 km/h a hrocha 48 km/h.

v_m = 45 km/h

v_h = 48 km/h

t = 9,58 s

$\underline{s = 100\ \text{m}}$

v = ?

Riešenie:

Rýchlosť, ktorou Usain Bolt zabehne dráhu 100 m za 9,58 s, je priemerná rýchlosť. Dá sa vyjadriť pomocou vzťahu (1.2)

$$v_p = \frac{s}{t} = \frac{100}{9{,}58} = 10{,}44\ \text{m/s}\ .$$

Pre porovnanie rýchlosti U. Bolta s rýchlosťou mačky a hrocha ju musíme premeniť na km/h, potom

$$v_p = 10{,}44\ \text{m/s} = 10{,}44.\frac{0{,}001\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{s}} = 37{,}59\ \text{km/h}\ .$$

Rýchlosť U. Bolta je v porovnaní s rýchlosťou mačky (v_m) a hrocha (v_h): $v_p < v_m < v_h$.

Ak by Usain Bolt súťažil s mačkou a hrochom nepredbehol by ich, pretože majú väčšiu rýchlosť ako on. Určite by však prebehol myš (jej rýchlosť je 12 km/h) alebo ježa (7 km/h).

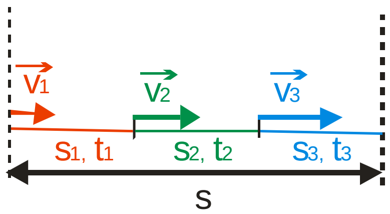
Príklad 1.2 Vlak prešiel prvú tretinu svojej dráhy rýchlosťou 20 km/h, druhú tretinu rýchlosťou 30 km/h a poslednú tretinu rýchlosťou 80 km/h. Aká je priemerná rýchlosť vlaku?

v_1 = 20 km/h, $s_1 = s/3$

v_2 = 30 km/h, $s_2 = s/3$

$\underline{v_1 = 80\ \text{km/h},\ s_3 = s/3}$

v_p = ?



Obr. 1.6

Riešenie:

Zo zadania príkladu vyplýva, že každú tretinu dráhy prejde vlak inou konštantnou rýchlosťou, teda na danom úseku dráhy sa vlak pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom (obr. 1.6). Na určenie priemernej rýchlosti použijeme vzťah (1.2) $v_p = \frac{s}{t}$,

kde $s = s_1 + s_2 + s_3$ a $t = t_1 + t_2 + t_3$, potom $v_p = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}$ (1).

Dráhu $s_1 = \frac{s}{3}$ prejde za dobu t_1 rýchlosťou v_1, pre ktorú platí podľa vzťahu (1.1)

$v_1 = \frac{s_1}{t_1}$.

Potom doba $t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{3v_1}$ (2).

Analogicky pre dobu $t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{3v_2}$ (3) a $t_3 = \frac{s_3}{v_3} = \frac{s}{3v_3}$ (4).

Dosadením (2), (3), (4) do vzťahu (1) vypočítame priemernú rýchlosť vlaku

$$v_p = \frac{\frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s}{\frac{s}{3v_1} + \frac{s}{3v_2} + \frac{s}{3v_3}} = \frac{s}{\frac{s}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)} = \frac{3}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)} = \frac{3v_1v_2v_3}{v_2v_3 + v_1v_3 + v_1v_2}$$

$$v_p = \frac{3.20.30.80}{30.80 + 20.80 + 20.30} = 31{,}3\ \text{km/h}$$

Priemerná rýchlosť vlaku je 31,3 km/h.

Príklad 1.3 Teleso sa dáva do pohybu so zrýchlením 2 m/s^2. Akú veľkú rýchlosť malo na konci dráhy dlhej 100 m?

a = 2 m/s^2

s = 100 m

v = ?

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že teleso sa pohybuje rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom, ktorého dráhu a rýchlosť vieme popísať nasledovnými rovnicami (1.4) a (1.5)

$v = v_0 + at$,

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

V tomto prípade je počiatočná rýchlosť telesa nulová (v_0 = 0 m/s), pretože sa začína teleso pohybovať z pokoja. Potom na určenie rýchlosti telesa na konci dráhy 100 m použijeme rovnicu $v = at$ (1), kde t je neznáma veličina, ktorú vyjadríme z rovnice dráhy $s = \frac{1}{2}at^2$. Odtiaľ pre dobu platí $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ (2).

Dosadením (2) do (1) vypočítame rýchlosť na konci prejdenej dráhy

$$v = a\sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{2sa} = \sqrt{2.100.2} = 20\,\text{m/s}\,.$$

Rýchlosť telesa na konci dráhy 100 m je 20 m/s.

Príklad 1.4 Vodič auta začne brzdiť, pričom veľkosť spomalenia je 6,5 m/s^2. Kým zastaví prejde dráhu 45 m. Za akú dobu zastavil a aká bola začiatočná rýchlosť auta?

a = 6,5 m/s^2

$\underline{s = 45\text{ m}}$

t = ? v_0 = ?

Riešenie:

Auto sa pohybuje rovnomerne spomaleným pohybom, pre ktorý platia vzťahy (1.4) a (1.5)

$$v = v_0 - at \qquad (1)$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \qquad (2).$$

Veľkosť rýchlosti auta sa rovnomerne zmenšuje. Keď sa auto zastaví, veľkosť jeho rýchlosti je v = 0 m/s, teda po dosadení rýchlosti do (1) si môžeme vyjadriť čas zastavenia auta

$$0 = v_0 - at \Rightarrow t = \frac{v_0}{a} \qquad (3).$$

Dosadením rovnice (3) do (2) dostaneme rovnicu pre dráhu

$$s = v_0\frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a}\,,$$

z ktorej úpravou vypočítame počiatočnú rýchlosť auta

$$v_0 = \sqrt{2sa} = \sqrt{2.45.6,5} = 24,2\,\text{m/s}\,.$$

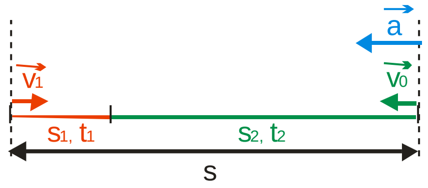
Po dosadení do (3) vypočítame čas, za ktorý sa auto zastaví

$$t = \frac{24,2}{6,5} = 3,7\,\text{s}\,.$$

Auto zastavilo za 3,7 s a jeho počiatočná rýchlosť bola 24,2 m/s.

Príklad 1.5 Dve telesá, ktoré sú vzdialené od seba na začiatku 100 m, sa pohybujú proti sebe. Prvé rovnomerne rýchlosťou 3 m/s, druhé rovnomerne zrýchlene so začiatočnou rýchlosťou 7 m/s a zrýchlením 4 m/s^2. Nájdete miesto a dobu ich stretnutia.

v_1 = 3 m/s
v_0 = 7 m/s
a = 4 m/s^2
<u>s = 100 m</u>
t = ?, s_1 = ?



Obr. 1.7

Riešenie:

Telesá sa pohybujú oproti sebe. Prvé rovnomerným priamočiarym pohybom, druhé rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom. Prvé teleso prejde do miesta stretnutia dráhu s_1 za dobu t_1 a druhé prejde dráhu s_2 za dobu t_2 (obr. 1.7). Potom vzhľadom na ich vzájomnú vzdialenosť s pre ich prejdené dráhy platí $s = s_1 + s_2$ (1). Doba, za ktorú sa telesá stretnú je rovnaká $t = t_1 = t_2$.

Dráha ktorú prejde prvé telesa je podľa vzťahu (1.3) $s_1 = v_1 t$ (2), dráha druhého telesa je podľa vzťahu (1.5) $s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (3).

Dosadením (2) a (3) do (1) pre vzájomnú vzdialenosť platí

$$s = v_1 t + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 .$$

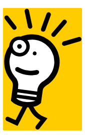
Po dosadení známych číselných hodnôt a následnej úprave dostaneme kvadratickú rovnicu

$$0 = 2t^2 + 10t - 100,$$

ktorej diskriminant $D = 10^2 - 4.2.100 = 900$. Potom doba, za ktorú sa telesá stretnú sa vypočíta ako

$$t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{900}}{2.2} .$$

Dostali sme dve riešenia $t_1 = \frac{-10+30}{2.2} = 5\,\mathrm{s}$ a $t_2 = \frac{-10-30}{2.2} = -10\,\mathrm{s}$.



Vo fyzike má význam len kladná hodnota doby stretnutia telies, preto druhý koreň kvadratickej rovnice neberieme do úvahy. Riešením je prvý koreň rovnice teda t_1 *= 5 s.*

Zaujíma nás ešte miesto stretnutia telies. To určíme tak, že do rovnice (2) alebo (3) dosadíme za čas t = 5 s.

$$s_1 = v_1 t = 3.5 = 15\,\mathrm{m}$$

Telesá sa stretnú po 5 s vo vzdialenosti 15 m od počiatočnej polohy prvého telesa.

Príklad 1.6 Vlak prešiel trať 4 km dlhú za 4 minúty, 40 sekúnd a zastavil sa. Vlak sa rozbiehal z pokoja s konštantným zrýchlením, ktoré bolo rovnako veľké ako spomalenie, s ktorým vlak v záverečnej časti trate brzdil. Na strednom úseku trate sa vlak pohyboval s konštantnou rýchlosťou 60 km/h. Aké veľké zrýchlenie mal vlak?

$a_1 = a_2 = a$

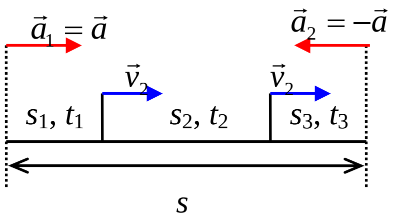
t = 4 min. 40s = 280 s

v_0 = 0 m/s

v_1 = 60 km/h = 16,67 m/s

<u>s = 4 km = 4000 m</u>

a = ?



Obr. 1.8

Riešenie:

Celkovú trať s rozdeľme na 3 úseky s_1, s_2, s_3 (obr. 1.8). Na prvom úseku sa vlak pohyboval rovnomerne zrýchleným priamočiarym pohybom so zrýchlením $a_1 = a$, počiatočná rýchlosť je nulová a doba, za ktorú prejde tento úsek je t_1. Potom rýchlosť a dráhu popíšeme rovnicami (1.4) a (1.5)

$v_1 = at_1$, (1)

$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2$ (2).

Na druhom úseku sa pohybuje vlak rovnomerným priamočiarym pohybom, teda koncová rýchlosť vlaku na prvom úseku sa rovná rýchlosti, ktorou sa vlak pohybuje na druhom úseku $v_1 = v_2 = v$. Dráhu s_2 prejde vlak za dobu t_2, potom podľa (1.3) platí

$s_2 = vt_2$ (3).

Na treťom úseku vlak spomaľuje z rýchlosti v na v_3 = 0 m/s za dobu t_3. Jeho rýchlosť a dráhu na tomto úseku popíšeme rovnicami (1.4) a (1.5)

$v_3 = v - at_3$ (4),

$s_3 = vt_3 - \frac{1}{2}at_3^2$ (5).

Pre celkovú dráhu a celkovú dobu platí

$s = s_1 + s_2 + s_3$ (6)

$t = t_1 + t_2 + t_3$ (7)

Dosadením (2), (3), (5) do (6) dostaneme $s = \frac{1}{2}at_1^2 + vt_2 + vt_3 - \frac{1}{2}at_3^2$. (8)

Dobu, za ktorú prejde vlak prvý úsek dráhy vyjadríme z (1) $t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{v}{a}$. (9)

Dobu t_3 vyjadríme z (4), kde v_3 = 0 m/s, $t_3 = \frac{v}{a}$. (10)

Na určenie doby na druhom úseku použijeme rovnicu (7), z ktorej $t_2 + t_3 = t - t_1$. (11)

Dosadením (9), (10) a (11) do (8) dostaneme pre dráhu

$$s = \frac{av^2}{2a^2} + vt - vt_1 - \frac{av^2}{2a^2} = vt - \frac{v^2}{a}.$$

Úpravou tejto rovnice vypočítame zrýchlenie

$$a = \frac{v^2}{vt - s} = \frac{(16{,}67)^2}{16{,}67.280 - 4000} = 0{,}416\ \mathrm{m/s^2}.$$

Vlak mal na trati zrýchlenie 0,416 m/s².

Príklad 1.7 Teleso bolo vrhnuté zvislo nahor rýchlosťou 50 m/s. Určte jeho rýchlosť na konci štvrtej sekundy. Za aký časový interval dosiahne vrchol svojej dráhy? Akú výšku dosiahne? Za akú dobu dopadne späť na Zem? Aká je rýchlosť dopadu?

$v_0 = 50$ m/s

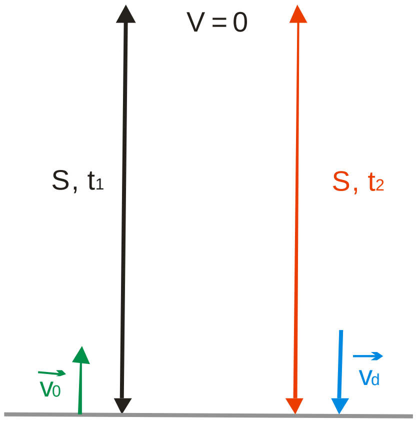
$v_4 = ?$ ... $t = 4$ s

$t = ?$

$s = ?$

$t_d = ?$

$v_d = ?$



Obr. 1.9

Riešenie:

Zo zadania úlohy vyplýva, že teleso bolo vrhnuté zvislo nahor, jeho pohyb môžeme popísať rovnicami (1.8) a (1.9)

$$v = v_0 - gt, \quad (1)$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Pri výpočte rýchlosti telesa na konci štvrtej sekundy použijeme rovnicu (1)

$$v_4 = v_0 - gt = 50 - 9{,}81.4 = 10{,}76\ \mathrm{m/s}.$$

Rýchlosť telesa na konci štvrtej sekundy je 10,76 m.

Ak teleso dosiahne vrchol svojej dráhy, potom jeho rýchlosť bude 0 m/s. Pri určovaní doby, za ktorú teleso dosiahne vrchol dráhy, dosadíme túto podmienku do rovnice (1)

$0 = v_0 - gt$, z ktorej si odvodíme pre dobu $t = \dfrac{v_0}{g}$ (3)

$$t = \frac{50}{9{,}81} = 5{,}1\ \mathrm{s}.$$

Teleso dosiahne vrchol svojej dráhy za 5,1 s.

Maximálnu výšku, ktorú dosiahne teleso pri vrhu nahor určíme z rovnice (2), kde za dobu t dosadíme vzťah (3), je to doba výstupu telesa

$$s = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} \qquad (4).$$

$$s = \frac{50^2}{2.9{,}81} = 127{,}42 \text{ m}.$$

Výška, ktorú dosiahne teleso pri svojom pohybe je 127,42 m.

Časový interval, za ktorý teleso dopadne späť na Zem je daný súčtom doby, za ktorú vystúpi nahor (3) a doby, za ktorú dopadne späť na Zem. Označme dobu výstupu t_1 a dobu, za ktorú dopadne späť na Zem t_2. Potom $t_d = t_1 + t_2$. Pre určenie t_2 využijeme skutočnosť, že teleso pri padaní k Zemi vykonáva voľný pád, ktorého dráha je podľa (1.7) $s = \frac{1}{2} g t_2^2$ (5). Odtiaľ $t_2 = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ (6), kde za dráhu s dosadíme vzťah (4), pretože teleso padá z tej istej výšky do ktorej vystúpilo keď letelo nahor. Potom $t_2 = \frac{v_0}{g}$.

Časový interval, za ktorý teleso dopadne späť na Zem je

$$t_d = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g} + \frac{v_0}{g} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2.50}{9{,}81} = 10{,}2 \text{ s}.$$

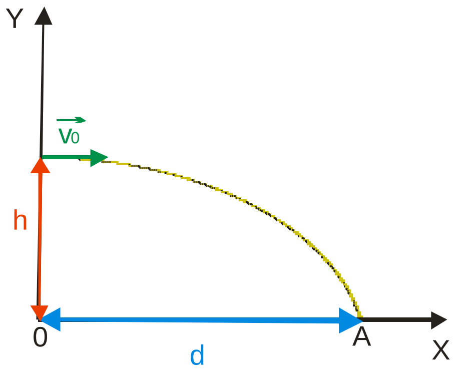
Teleso dopadne na Zem za 10,2 s.

Rýchlosť dopadu telesa na Zem určíme zo vzťahu pre rýchlosť voľného pádu (1.6) $v_d = g t_2$, kde $t_2 = \frac{v_0}{g}$. Potom $v_d = g \frac{v_0}{g} = v_0 = 50 \text{ m/s}$.

Rýchlosť dopadu telesa na Zem je 50 m/s.

Príklad 1.8 Zo stožiara vysokého 60 m bol hodený kameň vodorovným smerom rýchlosťou 60 m/s. Vypočítajte polohu kameňa na konci druhej sekundy, veľkosť rýchlosti kameňa v tomto čase a miesto dopadu na vodorovnú rovinu.

v_0 = 60 m/s
h = 60 m
x, y = ? ... t = 2 s
v_2 = ?
d = ?



Obr. 1.10

Riešenie:

Zvoľme súradnicový systém tak, že miesto z ktorého je kameň vrhnutý sa nachádza vo výške h nad začiatkom súradnicového systému 0 (obr. 1.10).

Kameň vykonáva vodorovný vrh, ktorého polohu a rýchlosť môžeme popísať rovnicami (1.10 – 1.13)

$v_x = v_0$, (1)

$v_y = -gt$, (2)

$x = v_0 t$, (3)

$y = h - \frac{1}{2}gt^2$. (4)

Pre určenie polohy kameňa použijeme rovnicu (3) a (4), v ktorých t = 2 s. Potom

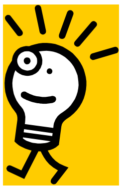
$$x = v_0 t = 60.2 = 120\,\text{m}$$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2 = 60 - \frac{1}{2}9{,}81.2^2 = 40{,}38\,\text{m}$$

Kameň na konci 2. sekundy sa nachádza v mieste so súradnicami $[120; 40{,}38]\,\text{m}$**.**

Veľkosť rýchlosti kameňa na konci 2 sekundy určíme pomocou rovníc (1) a (2), ktoré dosadíme do vzťahu

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ (5)



Rýchlosť je vektor $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, *ktorého veľkosť vieme vypočítať pomocou jeho súradníc* v_x, v_y, v_z *podľa vzťahu* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Potom

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{60^2 + (9{,}81.2)^2} = 63{,}126 \text{ m/s}.$$

Veľkosť rýchlosti kameňa na konci druhej sekundy je 63,126 m/s.

Na určenie doby a miesta dopadu na vodorovnú rovinu, teda pre bod A (obr. 1.10) platí, že jeho súradnice vzhľadom na súradnicový systém budú

$x = d$, (6)

$y = 0.$ (7)

Potom použitím rovníc (3), (4) a podmienok (6), (7) dostaneme

$d = v_0 t$, (8)

$0 = h - \frac{1}{2} g t^2$. (9)

Z rovnice (9) určíme dobu, za ktorú kameň dopadne na Zem $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ a dosadíme do (8). Potom vodorovná vzdialenosť, ktorú dosiahne kameň pri páde

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 60 \sqrt{\frac{2.60}{9{,}81}} = 209{,}849 \text{ m}.$$

Vodorovná vzdialenosť, ktorú pri svojom pohybe kameň dosiahne, je 209,849 metrov od miesta vrhnutia.

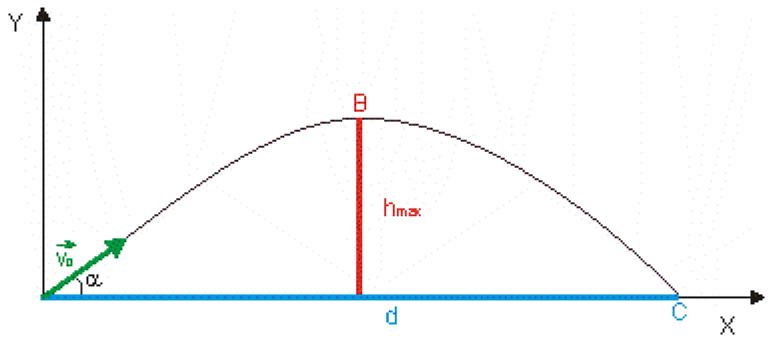
Príklad 1.9 Zo striekačky vystrekuje voda pod uhlom 60^0 rýchlosťou 50 m/s. Určte maximálnu výšku trajektórie a vzdialenosť dopadu vody. Odpor vzduchu zanedbajte.

$v_0 = 50$ m/s

$\underline{\alpha = 60^0}$

$h_{max} = ?$

$d = ?$



Obr. 1.11

Riešenie:

Zo zadania úlohy vyplýva, že voda vykonáva šikmý vrh, ktorý vieme popísať pomocou rovníc (1.14) - (1.17)

$v_x = v_0 \cos\alpha$, (1)

$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$, (2)

$x = v_0 t\cos\alpha + x_0$, (3)

$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2 + y_0$, (4)

kde x_0, y_0 sú súradnice počiatočného bodu, z ktorého voda strieka. V našom prípade je to bod, ktorého súradnice sú x_0 = 0 m, y_0 = 0 m. Pri výpočte maximálnej výšky, ktorú voda dosiahne pri pohybe (bod B) a vzdialenosti, do ktorej dostriekne (bod C), nás budú zaujímať dve podmienky, ktoré platia v týchto bodoch pre rýchlosť a polohu vody.

V bode B, v ktorom dosiahne voda maximálnu výšku ($y = h_{max}$), bude celkový rýchlosť daná len x – ovou súradnicou rýchlosti, y – ová súradnica bude v tomto bode nulová. Túto podmienku pre bod B $v_y = 0$, (5) pre šikmý vrh dosadíme do (2)

$0 = v_0 \sin\alpha - gt$ (6)

Z rovnice (6) vyjadríme dobu t, v ktorej voda dosiahne bod B

$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$ (7)

a dosadíme do rovnice (4)

$$h_{max} = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2 + 0 = v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\sin\alpha - \frac{1}{2} g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0{}^2 \sin^2\alpha}{g}.$$

Maximálna výška, ktorú voda dosiahne

$$h_{max} = \frac{1}{2}\frac{50^2 \sin^2 60^0}{9{,}81} = 95{,}6\,\mathrm{m}.$$

V bode C je výška telesa nulová (voda dopadne na Zem), preto pre výpočet dostrelu vody na povrch Zeme platí $x = d$, $y = 0$. Dosadením podmienky $y = 0$ do rovnice (4) dostaneme

$0 = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2} gt^2 + 0$. (8)

Z rovnice (8) vyjadríme dobu za ktorú voda dopadne na zem

$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ (9)

a dosadíme do rovnice (3)

$d = v_0 t\cos\alpha + 0 = v_0 \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\cos\alpha$ (10)

Potom vodorovná vzdialenosť, do ktorej dostriekne voda je

$$d = \frac{2.50^2 \sin 60^0}{9{,}81}\cos 60^0 = 220{,}7\,\mathrm{m}.$$

Maximálna výška, ktorú voda dosiahne je 95,6 m a vodorovná vzdialenosť, ktorú voda zasiahne je 220,7 m.

Príklad 1.10 Remeňom sa prenáša otáčavý pohyb z kolesa A s priemerom 50 cm, konajúceho 30 otáčok za minútu, na koleso B s priemerom 25 cm. Akú frekvenciu otáčania má koleso B?

d_1 = 50 cm

f_1 = 30 min^{-1} = 0,5 s^{-1}

$\underline{d_2 = 25\text{ cm}}$

f_2 = ?

Riešenie:

Zo zadania vyplýva, že kolesá sú navzájom prepojené remeňom, teda majú spoločnú obvodovú rýchlosť, pre ktorú podľa vzťahu (1.20) platí

$v = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$ (1)

Uhlové rýchlosti kolies vyjadríme pomocou vzťahu (1.23)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi f_1, \quad (2)$$

$$\omega_2 = 2\pi f_2 \quad (3)$$

a dosadíme do vzťahu (1). Dostaneme rovnicu

$$r_1 2\pi f_1 = r_2 2\pi f_2$$

Odtiaľ pre frekvenciu kolesa B platí

$$f_2 = \frac{r_1 f_1}{r_2}. \quad (4)$$

Pre priemery kolies platí $d_1 = 2r_1$ a $d_2 = 2r_2$. Ich dosadením do (4) vypočítame frekvenciu kolesa B.

$$f_2 = \frac{d_1 f_1}{d_2} = \frac{0{,}5.0{,}5}{0{,}25} = 1\,\text{Hz}.$$

Frekvencia otáčania kolesa B je 1 Hz.

Príklad 1.11 Chlapec roztočil kameň priviazaný na povraze dlhom 60 cm vo zvislej rovine. V okamihu, keď rýchlosť kameňa smerovala zvislo nahor, povraz i s kameňom pustil. Kameň vyletel do výšky 5 m. Vypočítajte frekvenciu otáčania kameňa, kým sa kameň pohyboval po kružnici.

h = 5 m

$\underline{r = 0{,}6\text{ m}}$

f = ?

Riešenie:

Pokiaľ bol kameň pripevnený na povraze, vykonával rovnomerný otáčavý pohyb po kružnici. Na výpočet frekvencie kameňa použijeme vzťah vyplývajúci z (1.23)

$\omega = 2\pi f$. (1)

Na vyjadrenie uhlovej rýchlosti použijeme vzťah medzi uhlovou a obvodovou rýchlosťou (1.20)

$v = r\omega$. (2)

Odtiaľ $\omega = \frac{v}{r}$. (3)

Dosadením (3) do (1) dostaneme

$\frac{v}{r} = 2\pi f$, (4)

kde v je odvodová rýchlosť kameňa a súčasne je to začiatočná rýchlosť v_0, ktorou vyletí kameň nahor, keď ho chlapec pustí. Od tohto okamihu začal kameň vykonávať zvislý vrh nahor. Pre rýchlosť kameňa a jeho výšku pri tomto pohybe platia vzťahy (1.8) a (1.9)

$v = v_0 - gt$, (5)

$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. (6)

Dobu, za ktorú kameň dosiahne maximálnu výšku vypočítame z rovnice (5) za podmienky, že v maximálnej výške je $v = 0$ m/s. Platí

$t = \frac{v_0}{g}$. (7)

Dosadením (7) do (6) si odvodíme vzťah pre počiatočnú rýchlosť v_0

$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^{\ 2}}{2g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$. (8)

Keďže platí, že obvodová rýchlosť $v = v_0$, potom dosadením (8) do (4) dostaneme

$\frac{\sqrt{2gh}}{r} = 2\pi f$.

Frekvenciu kameňa si potom môžeme vyjadriť v tvare

$f = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi r} = \frac{\sqrt{2.9,81.5}}{2.3,14.0,6} = 2,63\,\mathrm{Hz}$

Kameň sa pohyboval po kružnici s frekvenciou 2,63 Hz.